数理解析研究所講究録
645巻 1988年 68-77



# 時系列の検定における諸問題

広島大学理学部 谷口正信 (Masanobu Taniguchi)

1. Introduction. 本稿では Gaussian ARMA process の未知母数 $\theta$ に対して，検定問題 $H: \theta=\theta_0$，against $A$; $\theta\neq\theta_0$ を考える．まずこれに対する検定統計量の class $\mathcal{S}_H=\{T\}$ を提案する．この class は likelihood ratio test (LR), Wald test (W), modified Wald test (MW), Rao test (R) を特別な場合として含む．この $T\in\mathcal{S}_H$ に対して $H$ のもとで漸近展開を $O(n^{-1})$ の order まで与える．次に $T$ の Bartlett 調整を考え，$T$ が Bartlett 調整可能であるための必要十分条件を与える．最後に $T$ の local alternative $A_n: \theta=\theta_0+\varepsilon/\sqrt{n}$ に対して power を $O(n^{-1/2})$ の order まで評価する．具体的な model で LR, W, MW, R test の power 比較を行なった．結局，これらのどれもが uniformly superior でない．

2. Preliminaries. $\{X_t\}$ は平均 0 の Gaussian ARMA process で spectral density $f_{\theta_0}(\lambda)$ をもつ．ここに

$\theta_0 \in C \subset \Theta \subset R^1$, $\Theta$ は $R^1$ の open set, $C$ は $\Theta$ の compact set とする. さらに $f_\theta(\lambda)$ は $\theta$ に関して5回連続的微分可能であるとする. また

$$\infty > I(\theta) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\log f_\theta(\lambda)\right\}^2 d\lambda > 0$$

と仮定する.

$\underset{\sim}{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)'$ を $\{X_t\}$ の observed stretch とする。

$\Sigma_n$ を $\underset{\sim}{X}_n$ の covariance matrix とすると likelihood function は

$$L_n(\theta) = (2\pi)^{-n/2} |\Sigma_n|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\underset{\sim}{X}_n' \Sigma_n^{-1} \underset{\sim}{X}_n\right\}$$

で与えられる. 次に以下の記号を導入する.

$$Z_1(\theta) = \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\partial}{\partial\theta}\log L_n(\theta),$$

$$Z_2(\theta) = \frac{1}{\sqrt{n}}\left\{\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log L_n(\theta) - E_\theta\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log L_n(\theta)\right\},$$

$$Z_3(\theta) = \frac{1}{\sqrt{n}}\left\{\frac{\partial^3}{\partial\theta^3}\log L_n(\theta) - E_\theta\frac{\partial^3}{\partial\theta^3}\log L_n(\theta)\right\}.$$

Lemma 1. (Taniguchi (1986)).

$E\{Z_1(\theta)\}^2 = I(\theta) + O(n^{-1})$, $E\{Z_1(\theta)Z_2(\theta)\} = J(\theta) + O(n^{-1})$,

$E\{Z_1(\theta)\}^3 = \frac{1}{\sqrt{n}}K(\theta) + O(n^{-3/2})$, $E\{Z_1(\theta)Z_3(\theta)\} = L(\theta) + O(n^{-1})$,

$Var\{Z_2(\theta)\} = M(\theta) + O(n^{-1})$, $E\{Z_1(\theta)^2 Z_2(\theta)\} = \frac{1}{\sqrt{n}}N(\theta) + O(n^{-3/2})$

$cum\{Z_1(\theta), Z_1(\theta), Z_1(\theta), Z_1(\theta)\} = \frac{1}{n}H(\theta) + O(n^{-2})$,

ここに $J, K, L, \ldots$ 等は spectral density の積分を用いて表わせる。 □

さて $\theta_0$ の MLE $\hat{\theta}_n$ を

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \log L_n(\theta) = 0, \quad \theta \in \Theta \qquad \cdots (A)$$

をみたす解とする。

<u>Lemma 2.</u> (Taniguchi (1987)).

$0 < \alpha < 3/8$ とする。

(1) (A) をみたす statistic $\hat{\theta}_n$ が存在して、ある $d_2 > 0$ に対して

$$P_{\theta_0}^n [\, |\hat{\theta}_n - \theta_0| < d_2 n^{\alpha - 1/2} \,] = 1 - o(n^{-1}), \qquad \cdots (B)$$

が $\theta \in C$ に一様にみたされる。

(2) (B) をみたす $\{\hat{\theta}_n\}$ に対して次の stochastic expansion を得る。

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) = \frac{Z_1}{I_n} + \frac{Z_1 Z_2}{I^2\sqrt{n}} - \frac{3J + K}{2I^3\sqrt{n}} Z_1^2$$

$$+ \frac{1}{I^3 n}\left\{ Z_1 Z_2^2 + \frac{1}{2} Z_1^2 Z_3 + \frac{3(-3J-K)}{2I} Z_1^2 Z_2 + \frac{(3J+K)^2}{2I^2} Z_1^3 \right.$$

$$\left. - \frac{4L + 3M + 6N + H}{6I} Z_1^3 \right\} + o_p(n^{-1}). \qquad \square$$

次の変換を考える。

$$\begin{cases} W_1 = Z_1/\sqrt{I}, \\ W_2 = Z_2 - J \cdot I^{-1} Z_1, \\ W_3 = Z_3 - L \cdot I^{-1} Z_1. \end{cases}$$

さて検定問題 $H: \theta=\theta_0$, $A: \theta \neq \theta_0$ に対して次の test の class を考える.

$$\mathcal{S}_H = \{ T \mid T = W_1^2 + \frac{1}{\sqrt{n}}(a_1 W_1^2 W_2 + a_2 W_1^3)$$

$$+ \frac{1}{n}(b_1 W_1^2 + b_2 W_1^2 W_2^2 + b_3 W_1^4 + b_4 W_1^3 W_2 + b_5 W_1^3 W_3) + o_p(n^{-1}),$$

under $H$, $a_i, b_i$ は nonrandom constants $\}$.

実は $\mathcal{S}_H$ は極めて自然な class である. 実際, 次の tests はすべてこの class に入る.

<u>Example</u>. ① likelihood ratio test

$$LR = 2[\log L_n(\hat{\theta}_n) - \log L_n(\theta_0)]$$

は係数 $\left( \begin{array}{l} a_1 = I^{-1},\ a_2 = -K/3I^{3/2},\ b_1 = -\Delta/I,\ b_2 = I^{-2} \\ b_3 = (J+K)^2/4I^3 - (3M+6N+H)/12I^2 \end{array} \right.$

をもち, $\mathcal{S}_H$ に属する.

② Wald test

$$W = n(\hat{\theta}_n - \theta_0)^2 I(\hat{\theta}_n)$$

は係数 $\left( \begin{array}{l} a_1 = 2/I,\ a_2 = J/I^{3/2},\ b_1 = -2\Delta/I,\ b_2 = 3/I^2, \\ b_3 = -(3J^2+4JK+K^2)/4I^3 + (4L+3N+H)/6I^2 \end{array} \right.$

をもち, $\mathcal{S}_H$ に属する.

③ Modified Wald test

$$MW = n(\hat{\theta}_n - \theta_0)^2 I(\theta_0)$$

は係数 $\left( a_1 = 2/I,\quad a_2 = -(J+K)/I^{3/2},\quad b_1 = -2\Delta/I,\quad b_2 = 3/I^2, \right.$

$\quad b_3 = (9J^2+14JK+5K^2)/4I^3 - (L+3M+6N+H)/3I^2$

をもち、$\mathcal{S}_H$ に属する。

④ Rao test

$$R = Z_1(\theta_0)^2 I(\theta_0)^{-1}$$

は係数 $\left( a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = b_3 = 0 \right.$

をもち、$\mathcal{S}_H$ に属する。

## 3. Asymptotic expansions under $H$

$T \in \mathcal{S}_H$ の $H$ のもとでの分布の漸近展開は次で与えられる。

**Theorem 3.** $T \in \mathcal{S}_H$ に対して

$$P_{\theta_0}^n [T \le x] = P(\chi_1^2 \le x) + n^{-1} \sum_{j=0}^{3} A_j P(\chi_{1+2j}^2 \le x) + o(n^{-1}),$$

ただし

$$A_0 = 3a_1^2(M - J^2I^{-1})/8 + a_1(N - JI^{-1}K)/4I - b_1/2$$
$$- b_2(M - J^2I^{-1})/2 - \Delta/2I + H/8I^2 - 5K^2/24I^3,$$

$$A_1 = -3a_1^2(M - J^2I^{-1})/4 - a_1(N - JI^{-1}K)/I + 15a_2^2/8$$
$$+ 3a_2K/4I^{3/2} + b_1/2 + b_2(M - J^2I^{-1})/2 - 3b_3/2,$$

$$A_2 = 3a_1^2(M - J^2I^{-1})/8 + 3a_1(N - JI^{-1}K)/4I - 15a_2^2/4$$
$$- 2a_2K/I^{3/2} + 3b_3/2 + H/8I^2 - 5K^2/8I^3,$$

$$A_3 = 15a_2^2/8 + 5a_2K/4I^{3/2} + 5K^2/24I^3. \quad \square$$

## 4. Bartlett adjustment

$T \in \mathcal{S}_H$ を次の様に modify する.

$$T^* = T/E(T) = (1 + \rho/n)T + o(n^{-1}),$$

ここに

$$\rho = -\frac{1}{I^3}\{I^2\Delta + I^3b_1 + I^2(IM - J^2)b_2 + 3I^3b_3$$
$$+ Ia_1(IN - JK) + I^{3/2}Ka_2\}.$$

このとき $T^*$ の分布の asymptotic expansion の $n^{-1}$ terms が消えるための条件 (Bartlett 調整可能) は次で与えられる.

<u>*Theorem 4*</u>. $T^*$ に対し

$$P_{\theta_0}^n [T^* \le x] = P(\chi_1^2 \le x) + o(n^{-1})$$

であるための必要十分条件は

$$\begin{cases} a_2 = -K/3I^{3/2} \\ 3I^2(IM - J^2)a_1^2 + 6I(IN - JK)a_1 + 12I^3 b_3 + IH - 3K^2 = 0 \end{cases}$$

である. 特に LR, W, MW, R の中で上の条件をみたすものは LR test のみである. □

## 5. Asymptotic expansions under a local alternative

よって local alternative $\theta = \theta_0 + \varepsilon/\sqrt{n}$ のもとで power を評価する. test の class としては $A_n$ : $\theta = \theta_0 + \varepsilon/\sqrt{n}$ のもとで次の stochastic expansion をもつものを考える.
まず記号として, $U_1 = Z_1/\sqrt{I}$, $U_2 = \{Z_2 - J \cdot I^{-1} Z_1\}/\gamma_\theta I$, $\gamma_\theta$ は statistical curvature. を導入する.

$$\mathcal{S}_A = \{ S \mid S = \{U_1 + I^{1/2}\varepsilon\}^2$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{n}} [ c_1 U_1^3 + c_2 U_1^2 U_2 + \{c_3 U_1^2 + c_4 U_1 U_2\}\varepsilon$$

$$+ \{c_5 U_1 + c_6 U_2\}\varepsilon^2 + c_7 \varepsilon^3 ] + o_p(n^{-1/2})$$

with $c_7 = I^{3/2}c_1 - Ic_3 + \sqrt{I}c_5$, under $A_n \}$

実はこの class も非常に自然なものである.

実際 4つの test $\mathcal{S}$ = LR, W, MW, R が $\mathcal{S}_A$ に入ることも容易に示される. さらに任意の $\mathcal{S} \in \mathcal{S}_A$ に対して次の定理が得られる.

<u>Theorem 5.</u> $\mathcal{S} \in \mathcal{S}_A$ は $K_n : \theta = \theta_0 + \varepsilon/\sqrt{n}$ のもとで次の asymptotic expansion をもつ.

$$P^n_{\theta_0+\varepsilon/\sqrt{n}}(\mathcal{S} \le x) = P(\chi_1^2(\delta) \le x)$$

$$+ n^{-1/2} \sum_{j=0}^{3} B_j P(\chi^2_{1+2j}(\delta) \le x) + o(n^{-1/2}).$$

ここに $\delta^2 = I(\theta_0)\varepsilon^2/2$ で $\{B_j\}$ は spectral density を用いて明示的に表わされる. $\square$

## 6. Comparison of powers

$\mathcal{S} \in \mathcal{S}_A$ の power を LR test の power を基準にして比較できる.

<u>Theorem 6.</u> $\mathcal{S} \in \mathcal{S}_A$,

$$P^n_{\theta_0+\varepsilon/\sqrt{n}}(\mathcal{S} > x) - P^n_{\theta_0+\varepsilon/\sqrt{n}}(LR > x)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}}\Big[\frac{1}{3}(3I^{3/2}C_1 + K)\varepsilon^3 p_7(x;\delta)$$

$$+ \{(IC_3 - 3I^{3/2}C_1 - K)\varepsilon^3 + (3I^{1/2}C_1 + K/2)\varepsilon\} p_5(x;\delta)$$

$$+ \{(3I^{3/2}C_1 - 2IC_3 + I^{1/2}C_5 - J)\varepsilon^3 + (C_3 - 3I^{1/2}C_1 - K/I)\varepsilon\} p_3(x;\delta)\Big]$$

$+ o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$

ここに $p_f(x;\delta)$ は non central $\chi^2$-variate with $f$ degrees of freedom and noncentrality $\delta$ の pdf とする. D より具体的には、次の通りで示される.

<u>Example</u>

① $P^n_{\theta_0+\varepsilon/\sqrt{n}}(W > x) - P^n_{\theta_0+\varepsilon/\sqrt{n}}(LR > x)$

$= \frac{1}{\sqrt{n}}(3J+K)\left\{\frac{\varepsilon^3}{3}p_7(x;\delta) + \frac{\varepsilon}{I}p_5(x;\delta)\right\} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$

$$3J+K = \begin{cases} -2/\sigma^6 & : \theta = \sigma^2 \text{ (innovation)} \\ 4\beta/(1-\beta^2)^2 & : \theta = \beta \text{ (MA parameter)} \\ 0 & : \theta = \alpha \text{ (AR parameter)} \end{cases}$$

② $P^n_{\theta_0+\varepsilon/\sqrt{n}}(MW > x) - P^n_{\theta_0+\varepsilon/\sqrt{n}}(LR > x)$

$= \frac{1}{\sqrt{n}}(-3J-2K)\left\{\frac{\varepsilon^3}{3}p_7(x;\delta) + \frac{\varepsilon}{I}p_5(x;\delta)\right\} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$

$$-3J-2K = \begin{cases} \frac{1}{\sigma^6} & ; \theta = \sigma^2 \\ 0 & ; \theta = \beta \\ -6\alpha/(1-\alpha^2)^2 & ; \theta = \alpha \end{cases}$$

③ $P^n_{\theta_0+\varepsilon/\sqrt{n}}(R > x) - P^n_{\theta_0+\varepsilon/\sqrt{n}}(LR > x)$

$$= \frac{K}{\sqrt{n}} \left\{ \frac{\varepsilon^3}{3} P_7(x;\delta) + \frac{\varepsilon}{I} P_5(x;\delta) \right\} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

$$K = \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma^6} & ; \quad \theta = \sigma^2 \\ \dfrac{-6\beta}{(1-\beta^2)^2} & ; \quad \theta = \beta \\ \dfrac{6\alpha}{(1-\alpha^2)^2} & ; \quad \theta = \alpha . \end{cases}$$ □

以上より $S = LR, W, MW, R$ の中で どれもが 他に対に uniform に powerful でないことがわかる.

## References


[1] Taniguchi, M. (1986).
Third order asymptotic properties of maximum likelihood estimators for Gaussian ARMA processes. J. Multivariate Anal. 18, 1-31.

[2] Taniguchi, M. (1987)
Validity of Edgeworth expansions of minimum contrast estimators for Gaussian ARMA processes. J. Multivariate Anal. 21, 1-28.